SECȚIUNEA C – Barem de corectare

Problema 1.

a)

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției *f* sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(1+e^y)sinx, \frac{\partial f}{\partial y} = e^y(cosx - 1 - y)$$

0.5p

Punctele critice au coordonatele $x_k = \pi k$ *și* $y_k = (-1)^k - 1, unde\ k \in \mathbb{Z}$. **0.5p + 0.5p**

Matricea hessiana este $(x,y) = \begin{bmatrix} -(1+e^y)cosx & -e^y sinx \\ -e^y sinx & e^y(cosx - 2 - y) \end{bmatrix}$. **0.5p**

Pentru **k = 2p**, $A_p(2p\pi, 0)$ sunt puncte de maxim local. **0.5p**

Pentru **k = 2p+1**, $B_p((2p+1)\pi, -2)$ nu sunt puncte de extrem local. **0.5p**

b)

Se consideră : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x,y) = f(x,y) + 2$.

Se arată că $F(\pi, 0) = 0, F \in C^1(\mathbb{R}^2), \frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) \neq 0$. **1p**

$y'(\pi)$ **= 0** **1p**

$y''(\pi)$ **= 1.** **2p**

c)

Metoda I.

Se determină raza de convergență, **R = 1** **1p**

se studiază convergența seriei în **x = -1** și **x = 1** **0.5p + 0.5p**

mulțimea de convergență este **C = (-1, 1]** **1p**

Metoda II.

Limita crit. raportului **1p**

se studiază convergența seriei în **x = -1** și **x = 1** **0.5p + 0.5p**

mulțimea de convergență este **C = (-1, 1]** **1p**

Problema 2.

a)

studiul convergenței integralei **I(a, b)** în **x = a** **1p**

studiul convergenței integralei **I(a, b)** în **x = b** **1p**

I(a, b) este convergentă **1p**

b)

schimbare de variabilă $\sqrt{x-a} = t$, $\frac{1}{2\sqrt{x-a}}dx = dt$,

$x = a \Rightarrow t = 0$, $x = b \Rightarrow t = \sqrt{b-a}$ **2p**

$I(a,b) = 2\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{dt}{\sqrt{b-a-t^2}}$ **1p**

Calcul **I(a,b) = π** **1p**

c)

$\frac{\partial^{1008} f}{\partial x^{1008}}(x,y) = \frac{1}{b-y}\frac{1008!}{(x-a)^{1009}}$ **0.5p**

$\frac{\partial^{1009} f}{\partial y^{1009}}(x,y) = \frac{1}{x-a}\frac{1009!}{(b-y)^{1010}}$ **0.5p**

$\frac{\partial^{2017} f}{\partial x^{1008}\partial y^{1009}}(x,y) = \frac{1008!1009!}{(x-a)^{1010}(b-y)^{1011}}$ **1p**

$\frac{\partial^{2017} f}{\partial x^{1008} \partial y^{1009}}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)=\frac{1008!1009!2^{2021}}{(b-a)^{2021}}$ **1p**

Problema 3.

a)

$T_m(e_2)=e_1+e_3$ **0.5p**

$T_m(e_3)=me_1+e_2$ **0.5p**

$A_m=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ -m & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **1p**

b)

T_m – izomorfism <=> det$A_m \neq 0$ (+ justificare bijectivitate) 0.5+0.5p

det $A_m = m(1-m)$ **0.5p**

T_m – izomorfism pt $\mathbf{m} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ **0.5p**

c)

polinom caracteristic: $P(\lambda)=(1-\lambda)(m+\lambda)(1-m+\lambda)$ **0.5p**

valorile proprii: $\lambda_1=1, \lambda_2=-m, \lambda_3=m-1$, **0.5p**

Dacă valorile proprii sunt distincte => **T** este diagonalizabil **0.5p**

Dacă **m=-1** => $\lambda_1=\lambda_2=1$, A_m este simetrică => **T** este diagonalizabil **0.5p**

Dacă **m=2** => $\lambda_1=\lambda_3=1$, $m_g(1)=1$ => **T** nu este diagonalizabil **0.5p**

Dacă **m =** $\frac{1}{2}$ => $\lambda_3=\lambda_2=-\frac{1}{2}$, $m_g\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, **T** nu este diagonalizabil **0.5p**

d)

$T_{\frac{1}{4}}$ – diagonalizabil; $\lambda_1=1, \lambda_2=-\frac{1}{4}, \lambda_3=-\frac{3}{4}$; determinarea unei baze, de exemplu

$B=\{(4,3,4),(3,-1,1),(1,-1,1)\}$ **1p**

${A_{\frac{1}{4}}}^k=PD^kP^{-1}$ **0.5p**

calculul matricii ${A_{\frac{1}{4}}}^k$ (forma explicită) **1p**

valoarea limitei **0.5p**

Problema 4

a) $\alpha(x+y+z-1)+\beta(x+y-2z+2)=0$……0,5p

$d: \begin{cases} x+y+y-1=0 \\ x+y-2z+2=0 \end{cases}$……1p

intersectia este nevida sau se determina un vector director……1,5p

b) planul bisector apartine familiei……1p

distantele de la un punct oarecare al planului bisector la cele doua plane sunt egale ……1p

determina $\alpha=\pm\sqrt{2}\cdot\beta$……1p

ecuatiile: $(\pm\sqrt{2}+1)x+(\pm\sqrt{2}+1)y+(\pm\sqrt{2}-2)z \mp \sqrt{2}+2=0$……1p

c) Metoda 1: dreapta d este perpendiculara pe planul P……1p

$d \cap P=\{C\},\ C(0,0,1)$……1p

locul geometric este un cerc……………………………………………………………………………………0,5p

ecuatiile: $\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ ……………………………………………………………………….0,5p

Metoda 2: centrele sferelor $A(m,m,p)$……………………………………………………………………………….0,5p

distanta de la A la d este $\sqrt{2m^2+(p-1)^2}$……………………………………………………………2p

locul geometric: : $\begin{cases} 2x^2+(z-1)^2=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ ……………………………………………………………….0,5p