MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE UNIVERSITATEA MARITIMA CONSTANTA

FUNDATIA “TRAIAN LALESCU”

CONCURSUL NATIONAL STUDENTESC DE MATEMATICA “TRAIAN LALESCU”

Editia a X-a, Constanta, 4 - 6 Mai 2017

Sectiunea C

1. Fie functia $f: R^2 \to R, f(x,y) = (1+e^y)cosx - ye^y$.

a) Sa se calculeze extremele locale ale functiei f.

b) Sa se demonstreze ca ecuatia $f(x,y) + 2 = 0$ defineste o functie $y = y(x)$ in vecinatatea punctului $A(\pi, 0)$. Calculati $y''(\pi)$.

c) Sa se studieze convergenta seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n\pi,0)}{n} \cdot x^n, x \in \mathbb{R}$.

2. Fie functia : $D \subset R^2 \to R, f(x,y) = \frac{1}{(x-a)(b-y)}$, unde D este domeniul maxim de definitie si $a, b \in R$, $a < b$.

a) Sa se arate ca integrala $I(a,b) = \int_a^b \sqrt{f(x,x)}\, dx$ este convergenta.

b) Sa se calculeze integrala $I(a,b)$.

c) Sa se calculeze $\frac{\partial^{2017} f}{\partial x^{1008} \partial y^{1009}} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

3. Consideram operatorii liniari $T_m: R^3 \to R^3,\ m \in R$, pentru care $T_m(e_1) = -me_2 + me_3$,

$T_m(e_1 + e_2) = e_1 - me_2 + (m+1)e_3,\ T_m(e_1+e_2+e_3) = (1+m)e_1 + (1-m)e_2 + (1+m)e_3$,

unde $\{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonica din R^3.

a) Aflati A_m, matricea operatorului T_m in baza canonica.

b) Aflati $m \in R$ pentru care T_m este izomorfism.

c) Aflati $m \in R$ pentru care T_m este diagonalizabil.

d) Pentru $= \frac{1}{4}$, aflati o baza in raport cu care T_m are forma diagonala si aflati apoi $\lim_{k\to\infty}(A_m^k \cdot e_1)$.

4. Sa considerăm fasciculul de plane $\pi_{\alpha,\beta}: (\alpha+\beta)x + (\alpha+\beta)y + (\alpha-2\beta)z - \alpha + 2\beta = 0$.

a) Sa se demonstreze ca planele contin o dreapta comuna si sa se determine ecuatia acestei drepte.

b) Sa se determine ecuatiile planelor bisectoare ale planelor $\pi_{1,0}$ si $\pi_{0,-1}$.

c) Sa se determine locul geometric al centrelor sferelor de raza 1 tangente la dreapta comuna, situate in planul $P: x - y = 0$.

NOTĂ. Toate subiecte sunt obligatorii. Timp de lucru: 4 ore.